Ueber die

Minimalflächen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Carls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Robert Glaser
aus Herrenberg.

Tübingen
Druck von H. Laupp jr
1891

Ueber die

Minimalflächen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Carls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Robert Glaser
aus Herrenberg.

Tübingen
Druck von H. Laupp jr
1891

Von der Fakultät angenommen den 9. März 1891.

MEINEM LIEBEN VATER

in Dankbarkeit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550015_0092

Ueber die Minimalflächen.

Die vorliegende Arbeit hatte ursprünglich den Zweck, die Methoden, die Herr Prof. Lie im 14ten Band der mathemat. Annalen gegeben hat, um gewisse algebraische Minimalflächen zu bestimmen, derart umzugestalten und zu erweitern, dass sich die einfacheren Fälle bequem übersehen lassen.

Es zeigte sich im Laufe der Untersuchung, dass mittelst der Gleichungen, welche diese Erweiterung enthalten, auch die Sätze, welche der oben genannte Gelehrte im 15ten Band der math. Annalen und Herr Ribaucour im 45ten Band der Mémoires couronnés auf andere Weise gefunden haben, in einfacher Art sich beweisen lassen. Ebenso bestimmt man leicht solche Minimalflächen, welche eine Schar algebraischer Kurven enthalten oder von einer Schar algebraischer Developpabelen umhüllt werden, Aufgaben, die zu den Untersuchungen von Herrn Schwarz (Journal für Math., B. 80 und 87) in Beziehung stehen.

Die Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste behandelt die Minimalflächen im Allgemeinen, hauptsächlich die algebraischen; im zweiten Abschnitte werden Anwendungen gegeben.

Die Gleichungen einer algebraischen Minimalkurve (§ 1), welche eine algebraische Minimalfläche bestimmt, hängen von einer bestimmten ebenen Kurve ab, die in § 2 zum Zwecke einer Vereinfachung der Gleichungen der Minimalkurve so transformiert wird, dass letztere ihre Gestalt beibehält. Die Transformation der Minimalkurven mittelst reciproker Radienvektoren führt zu einer Erzeugungsweise dieser Kurven (§ 3). § 4 beschäftigt sich mit der Bestimmung von Ordnung, Rang und Klasse der algebraischen Minimalkurven. Die Gleichungen der Minimalflächen in Punkt- und Ebenenkoordinaten (§ 5) geben zu Untersuchungen Veranlassung, welche sich auf die Abbildung der Flächen (§ 6), auf die Doppelflächen (§ 7), auf die unendlich fernen Kurven und die Knotenpunkte dieser Flächen (§ 8), auf Ordnung und Klasse (§ 9), auf ein mit den Minimalflächen eng

verbundenes Strahlensystem (§ 10 und § 11 beziehen). § 12 behandelt Minimalflächen mit einer Schar algebraischer Kurven.

Der zweite Abschnitt behandelt in § 13 die Enneper'sche Fläche 9ter Ordnung, in § 14 bis § 18 alle Minimalkurven vierter Klasse, vierter, fünfter und sechster Ordnung. § 18 enthält Beispiele zu § 12.

Ich gestatte mir an dieser Stelle, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Brill, für die vielseitige Anregung, die ich während meiner Studien und bei der Abfassung dieser Arbeit erfahren durfte, meinen besten Dank auszusprechen.

I. Allgemeines zur Theorie der Minimalkurven und Minimalflächen.

§ 1. Die Gleichungen der Minimalkurven in Punkt- und Ebenenkoordinaten.

1. Durch die bekannten Weierstrass'schen Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= (1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s) = \int (1-s^2)F'''(s)ds, \\ y &= i\left\{(1+s^2)F''(s) - 2sF'(s) + 2F(s)\right\} = i\int (1+s^2)F'''(s)ds, \\ z &= 2sF''(s) - 2F'(s) = 2\int sF'''(s)ds \end{aligned}$$

sind sämmtliche Minimalkurven bestimmt. Im Falle algebraischer Minimalkurven ist $F(s)$ eine beliebige algebraische Funktion von s. Die allgemeinste algebraische Funktion $Z = F(s)$ ist definiert durch die Gleichung einer algebraischen Kurve $f(s, Z) = 0$ von der Ordnung n.

Wir lassen nun die Koordinaten der Minimalkurven nicht allein von dem Parameter s, sondern auch noch von Z abhängen, während zwischen s und Z die Gleichung $f(s, Z) = 0$ besteht. Zunächst führe ich andere Bezeichnungen ein und setze

$$s = \varkappa, \quad Z = \lambda = F(s) = F(\varkappa), \; f(s, Z) = f(\varkappa, \lambda) = 0.$$

Dann ist:

$$F(s) = F(\varkappa) = \lambda,$$

$$F'(s) = F'(\varkappa) = \frac{d\lambda}{d\varkappa} = -\frac{f_1}{f_2} \left(f_1 = \frac{\partial f}{\partial \varkappa}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}\right),$$

$$F''(s) = F''(\varkappa) = \frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} = -\frac{f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22}}{f_2^3}.$$

Macht man noch die Gleichung $f(\varkappa, \lambda) = 0$ mit μ homogen, so erhält man mit Hilfe des Euler'schen Satzes über homogene Funktionen in den homogenen Variabelen $\varkappa$, λ, μ:

$$F(s) = \lambda,\ F''(s) = -\frac{f_1}{f_2},\ F''(\varkappa) = \frac{\mu^3 H}{(n-1)^2 f_2^3},$$

wo H die Hesse'sche Determinante der Form $f(\varkappa, \lambda, \mu)$ bedeutet. Macht man noch die Koordinaten der Minimalkurven mit t homogen, so erhält man aus den Formeln (1) für die Koordinaten einer algebraischen Minimalkurve folgende Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \rho x &= (\mu^2 - \varkappa^2)\mu H + 2(n-1)^2 f_2^2 f_3, \\ \rho y &= i\left\{(\mu^2 + \varkappa^2)\mu H - 2(n-1)^2 f_2^2 f_3\right\}, \\ \rho z &= 2\left\{\varkappa\mu^2 H + (n-1)^2 f_2^2 f_1\right\}, \\ \rho t &= (n-1)^2 f_2^3 \quad \left(f_3 = \frac{\partial f}{\partial \mu}\right), \end{aligned}$$

wo ρ ein Proportionalitätsfaktor ist, und zwischen den homogenen Grössen $\varkappa$, λ, μ die Beziehung besteht:

$$f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0.$$

2. Die Gleichung:

$$x(\mu^2 - \varkappa^2) + iy(\mu^2 + \varkappa^2) + 2\varkappa\mu z + 4\lambda\mu t = 0$$

stellt mit $f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$ zusammen die Gleichung der Schmiegungsebene der Minimalkurve dar. Setzt man nämlich wieder $\mu = 1$, so ergeben sich die Koordinaten der durch unsere Ebene bestimmten Rückkehrkante aus den 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} x(1 - \varkappa^2) + iy(1 + \varkappa^2) + 2\varkappa z + 4\lambda t &= 0, \\ x(-\varkappa) + iy\,\varkappa + z + 2\frac{d\lambda}{d\varkappa} t &= 0, \\ x(-1) + iy + 2\frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} t &= 0, \end{aligned}$$

nämlich:

$$(3)\qquad x : y : z : t = \begin{Vmatrix} 1-\varkappa^2 & i(1+\varkappa^2) & 2\varkappa & 4\lambda \\ -\varkappa & i\varkappa & 1 & 2\frac{d\lambda}{d\varkappa} \\ -1 & 1 & 0 & 2\frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} \end{Vmatrix}.$$

Durch einfache Ausrechnung der Determinanten dieser Matrix erhält man für $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ Werte, welche mit den Ausdrücken (1) gleichbedeutend sind.

Die Gleichungen einer algebraischen Minimalkurve in Ebenenkoordinaten sind daher in Parameterform:

$$\begin{aligned} \sigma u &= \mu^2 - \varkappa^2, & \sigma v &= i(\mu^2 + \varkappa^2), \\ \sigma w &= 2\varkappa\mu, & \sigma \vartheta &= 4\lambda\mu \end{aligned} \tag{4}$$

mit der Beziehung:

$$f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0.$$

Die abwickelbare Fläche der Minimalkurve enthält den unendlich fernen Kugelkreis, denn aus den Gleichungen (4) erhält man:

$$\sigma^2(u^2 + v^2 + w^2) = (\mu^2 - \varkappa^2)^2 - (\mu^2 + \varkappa^2)^2 + 4\varkappa^2\mu^2 = 0.$$

Die Vielfachheit M des unendlich fernen Kugelkreises in dieser Fläche ist gleich dem Grade, bis zu welchem λ in $f(\varkappa, \lambda, \mu) = f = 0$ ansteigt; denn wegen der Beziehung $dx : dy : dz = 1 - \varkappa^2 : i(1 + \varkappa^2) : 2\varkappa$ entspricht jedem $\varkappa$ eine ganz bestimmte Tangentenrichtung, also ein ganz bestimmter Punkt auf dem unendlich fernen Kugelkreis (vergl. Lie, Math. Annal. 14); jedem $\varkappa$ entsprechen soviele Punkte x, y, z der Minimalkurve als man aus $f = 0$ für λ Werte erhält, wenn man $\varkappa$ einer beliebigen Konstanten gleichsetzt.

Um also alle algebraischen Minimalkurven zu finden, darf man nur beliebige Funktionen $f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$ wählen. Durch jedes der beiden Gleichungssysteme (2) und (4) ist die Minimalkurve vollständig bestimmt.

Man kann auch nach Herrn Darboux von einer Fläche $F(u, v, w, \vartheta) = 0$ ausgehen. Die gemeinschaftlichen Elemente dieser Fläche und des unendlich fernen Kugelkreises bilden eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante Minimalkurve ist. Die zu $F = 0$ gehörige Funktion $f = 0$ findet man, wenn man in $F = 0$ für u, v, w, ϑ die Werte aus dem System (4) einsetzt. Umgekehrt ist durch $f = 0$ eindeutig eine Fläche $F = 0$ bestimmt; denn aus den Gleichungen 4 folgt durch Umkehrung:

$$\tau\varkappa = 2w, \quad \tau\lambda = \vartheta, \quad \tau\mu = 2(u - iv), \tag{5}$$

wo τ ein Proportionalitätsfaktor ist.

§ 2. **Transformation der Kurve $f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$ in eine andere $f'(\varkappa', \lambda', \mu',) = 0$ derart, dass sowohl durch $f = 0$ als $f' = 0$ dieselbe algebraische Minimalkurve definiert ist.**

Eine Minimalkurve ändert jedenfalls ihre Gestalt nicht, wenn man auf die Fläche $F = 0$ eine orthogonale Transformation an-

wendet, bei welcher der unendlich ferne Kugelkreis invariant bleibt. Dies ist der Fall, wenn man mit dem Koordinatensystem eine Drehung um den Ursprung vornimmt und für ϑ eine beliebige lineare Funktion von u', v', w', ϑ' setzt. Die Transformationsformeln sind:

$$\begin{aligned} u &= u'\alpha + v'\beta + w'\gamma, \\ v &= u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma', \\ w &= u'\alpha'' + v'\beta'' + w'\gamma'', \\ \vartheta &= u'p + v'q + w'r + \vartheta' s, \end{aligned}$$

wo die α, β, γ u. s. w. Cosinuse mit der bekannten Bedeutung sind. Dieselben führen die Gleichungen der Fläche $F = 0$ über in $F(u', v', w' \vartheta') = 0$. Die letzte Gleichung gibt Veranlassung zu einer Kurve $f'(\varkappa', \lambda', \mu') = 0$. $f = 0$ und $f' = 0$ bestimmen dieselbe Minimalkurve. Die Kurve $f = 0$ transformiert sich in die Kurve $f' = 0$ mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tau\varkappa &= \varkappa'^2(-\alpha'' + i\beta'') + \mu'^2(\alpha'' + i\beta'') + 2\varkappa'\mu'\gamma'', \\ (6)\quad \tau\lambda &= 2\lambda'\mu' + a\varkappa'^2 + b\varkappa'\mu' + c\mu'^2, \\ \tau\mu &= \varkappa'^2(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta') + \mu'^2(\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta') \\ &\qquad + 2\varkappa'\mu'(\gamma - i\gamma'), \end{aligned}$$

wo τ ein Proportionalitätsfaktor ist, die a, b, c als Funktionen von p, q, r, s beliebige konstante Grössen sind.

Es gibt also verschiedene Kurven $f = 0$, welche zu derselben Minimalkurve Veranlassung geben. Sämtliche gehen durch die Transformationsformeln (6) aus einander hervor. So lassen sich z. B. die beiden Kurven $\lambda(\varkappa + a\mu) + b\mu^2 = 0$ und $\lambda\mu^2 + a\varkappa^3 = 0$ aus einander ableiten. Die letztere Gleichung ist aber für die Rechnung bedeutend einfacher als die erstere.

§ 3. Transformation der Minimalkurven mittelst reciproker Radienvektoren.

Es ist bekannt, dass Minimalkurven bei Anwendung dieser Transformation wieder in Minimalkurven übergehen. Es gehen hiebei die Tangenten der ursprünglichen Kurve in die Tangenten der neuen über. Wir erhalten, wie sich leicht nachweisen lässt, für die letzteren folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1-\varkappa^2}{8\lambda} + \rho\left[1 - \left(\frac{\varkappa d\lambda - 2\lambda d\varkappa}{d\lambda}\right)^2\right] \\ (7)\quad y &= -i\frac{1+\varkappa^2}{8\lambda} + \rho \cdot i\left[1 + \frac{\varkappa d\lambda - 2\lambda d\varkappa}{d\lambda}\right] \end{aligned}$$

$$z = -\frac{2\varkappa}{8\lambda} + \rho \cdot 2\,\frac{\varkappa d\lambda - 2\lambda d\varkappa}{d\lambda}$$

mit der Beziehung $f(\varkappa, \lambda) = 0$.

Man sieht aus den Gleichungen (7) (indem man $\rho = 0$ setzt), dass man die transformierte Minimalkurve erhält (bis auf einen unwesentlichen Aehnlichkeitsfaktor), wenn man das Gleichungssystem (4) als die Gleichungen einer Kurve in Punktkoordinaten auffasst und die abwickelbare Fläche konstruiert, welche dieser Kurve und dem unendlich fernen Kugelkreis umschrieben ist. Die Rückkehrkante ist dann die neue Minimalkurve. Da nun jede Minimalkurve sich in eine andere mittelst reciproker Radienvektoren transformieren lässt, so können wir auch vom Gleichungssystem (4) ausgehen und das ihm entsprechende Punktgebilde als Fläche $F(u, v, w, \vartheta) = 0$ betrachten.

Man kann nach den Transformationsformeln fragen, welche $f = 0$ in eine Gleichung $f' = 0$ überführen derart, dass $f' = 0$ die charakteristische Kurve für die transformierte Minimalkurve darstellt.

Es seien $\varkappa'$, λ', $\mu' = 1$ die neuen Variabelen, dann erhält man eine Transformationsformel aus den Gleichungen (7), nämlich

$$\varkappa' = \frac{\varkappa d\lambda - 2\lambda d\varkappa}{d\varkappa}. \tag{8}$$

Wir bestimmen noch, welchen Wert man ρ in den Gleichungen (7) beilegen muss, damit diese die Gestalt der Gleichungen (1) annehmen.

Man erhält für ρ:

$$\rho = \frac{d^2\lambda'}{d\varkappa'^2} + \frac{1}{8\lambda},$$

$$\lambda' = -\frac{(\varkappa - \varkappa')^2}{16\lambda} \text{ oder mittelst (8)}$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{4}\cdot\left(\frac{d\varkappa}{d\lambda}\right)^2. \tag{9}$$

Stellt $f(\varkappa, \lambda) = 0$ eine algebraische Kurve dar, so lauten also die Transformationsformeln in homogenen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \tau\varkappa' &= 4(\varkappa f_1 + 2\lambda f_2) f_1, \\ \tau\lambda' &= -\lambda f_2^2, \\ \tau\mu' &= 4 f_1^2 \mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Ist die Kurve $f = 0$ gegeben, so bestimmen sich die Eigenschaften der Kurve $f' = 0$ in bekannter Weise.

§ 4. Bestimmung von Ordnung, Rang und Klasse der algebraischen Minimalkurven.

1. Aus dem Gleichungssystem (2) folgt: $\rho(x - i\,y) = \mu^3 H$. Man sieht hieraus, dass bei Bestimmung von Ordnung, Rang und Klasse die gemeinschaftlichen Punkte von $f = 0$, $f_2 = 0$, $\mu = 0$ und diejenigen von $f = 0$, $f_2 = 0$, $H = 0$ eine wesentliche Rolle spielen.

Wir nehmen an, $f = 0$ sei vom Grade n, λ steige an bis zum Grade M, so dass der Punkt $\varkappa = \mu = 0$ ein $(n-M)$facher ist; ferner habe $f = 0$ sonst noch beliebige Singularitäten und sei vom Geschlechte p.

Wir untersuchen zuerst das Verhalten einer linearen Kombination der Ausdrücke (2) im Punkte $\varkappa = \mu = 0$. Wegen $nf = \varkappa f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3$ verhält sich hier $f_2 = 0$ wie $f = 0$; eine lineare Kombination daher wie der Ausdruck:

$$H\mu[a(\mu^2 - \varkappa_2) + ib(\mu^2 + \varkappa^2) + 2c\varkappa\mu] = 0,$$

(a, b, c beliebige konstante Grössen). Wir nehmen ferner an, dass $\mu = 0$ die Kurve $f = 0$ ausser den von dem $(n - M)$ fachen Punkt herrührenden Schnittpunkten noch in α weiteren schneide. Ferner mögen $\mu = 0$, $f = 0$ und $f_2 = 0$ β gemeinsame Punkte besitzen; dann ist, weil für $\mu = 0$ f_2 im Quadrat als Faktor in unserer linearen Kombination heraustritt und für die übrigen gemeinschaftlichen Punkte das Verhalten von H = 0 und f = 0 massgebend ist, die Ordnung m der Minimalkurve:

(11) $$m = 3n(n-1) - 6d - 8r - 3(n - M) - \alpha - 2\beta.$$

Der Rang der Minimalkurven bestimmt sich auf zwei Arten. Einmal aus den Gleichungen (2) für die Punktkoordinaten, dann aus den Gleichungen (4) für die Ebenenkoordinaten. Im ersten Fall erhält man den Rang aus der Anzahl der Kurven des Büschels:

$$(a_1x + a_2y + a_3z + a_4t) + g(b_1x + b_2y + b_3z + b_4t) = 0,$$

für x, y, z, t die Werte im System (2) eingesetzt, welche die Kurve $f = 0$ berühren, wenn g veränderlich ist, die a und b beliebige, aber feste Grössen sind. Von dieser Zahl ist noch die Zahl ρ der Spitzen der Minimalkurve abzuziehen, weil diesen im Bilde einfache Punkte entsprechen. Ist N die Zahl der Verzweigungspunkte, die zu einem vielfachen Punkte der Kurve $f = 0$ hinzutreten, so ist (Clebsch-Lind. pag. 460) der Rang R der Minimalkurve:

(12) $$R = 2(m + p - 1) - \Sigma N - \rho.$$

Die Gleichungen für die Ebenenkoordinaten oder vielmehr die

Gleichung der Schmiegungsebene der Minimalkurve ergeben für eine Sehne der letzteren die Gleichungen:

$$x(\mu^2 - \varkappa^2) + iy(\varkappa^2 + \mu^2) + 2\varkappa\mu z + 4\lambda\mu t = 0,$$
$$- x\varkappa f_2 + iy\varkappa f_2 + z\mu f_2 + 2\mu f_1 t = 0.$$

Verbindet man mit den Gleichungen dieser Geraden noch diejenigen einer beliebigen zweiten, so ist die Bedingung, dass sich diese Geraden schneiden:

$$\mu\varphi = \begin{vmatrix} \mu^2 - \varkappa_2 & 2i\mu^2 & 2\varkappa\mu & 4\lambda\mu \\ \varkappa f_2 & 0 & \mu f_2 & 2\mu f_1 \\ a_1 & a_2 + ia_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 + ib_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die a und b beliebige, aber feste Grössen sind.

Die Zahl der gemeinsamen, mit den a und b beweglichen Punkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$ ist gleich dem Rang R.

Die Kurve $\varphi = 0$ verhält sich in den singulären Punkten von $f = 0$, wie die erste Polare von $f = 0$. Ausgenommen ist der Punkt $\varkappa = \mu = 0$. Das Verhalten in diesem Punkte ist wie dasjenige von $f_1(a\varkappa^2 + b\varkappa\mu + c\mu^2) = 0$, weil sich hier $f_2 = 0$ wie $f = 0$ verhält. Da für $\mu = 0$, $f_2 = 0$, $f = 0$ auch $f_1 = 0$ ist, wenn nicht $\varkappa = 0$ ist, so geht die Kurve $\varphi = 0$ auch durch diejenigen Punkte von $f = 0$, deren Anzahl wir mit β bezeichnet haben. Man erhält somit:

(13) $$R = n(n + 1) - 2d - 3r - 2(n - M) - \alpha - \beta.$$

Die Klasse C einer Minimalkurve ist gleich der Anzahl der die Kurve $f = 0$ oskulierenden Kurven, die in dem aus den Ausdrücken (2) gebildeten linearen Netze enthalten sind. Man erhält daher (Clebsch-Lind. pag. 460):

(14) $$C = 3(m + 2p - 2) - 2\Sigma N - 2\rho.$$

Die Gleichungen für die Ebenenkoordinaten liefern sofort:

(15) $$C = 2n - (n - M) - \alpha = n + M - \alpha.$$

Aus $m = m$, Formel (12) und (14) folgt die Relation:

(16) $$m + C - 2R + 2 - 2p = 0$$

(vergl. Lie, math. Annalen, Band 14, wo $p = 0$, $M = 1$ ist).

Dieselbe Relation folgt auch aus den Formeln (11), (13) u. (15).

Uebrigens erhält man diese Relation schon aus den Plückerschen Gleichungen für Raumkurven (Salmon, Raumgeom. 3te Aufl. pag. 662), wenn man die Anzahl der stationären Erzeugenden gleich Null setzt.

Minimalkurven aber können solche nicht besitzen. Denn im Falle ihrer Existenz müssten die Determinanten der Matrix (3) für

bestimmte Werte von $(\varkappa, \lambda)$ verschwinden oder auch die rechten Seiten der Ausdrücke (2). Die Punkte, für welche diese Ausdrücke alle verschwinden, sind, wenn sie überhaupt Bildpunkte der Minimalkurve sind, Bildpunkte derjenigen Punkte, welche auf dem unendlich fernen Kugelkreis liegen, da t hier in höherer Ordnung verschwindet als x, y, z.

Es besitzen somit Minimalkurven keine stationären Erzeugenden.

2. In § 3 haben wir eine Minimalkurve mittelst reciproker Radienvektoren transformiert. Es fragt sich, wie die alten charakteristischen Zahlen m, C, R mit den entsprechenden neuen m', R', C' zusammenhängen.

Wenn man das durch das System (4) definierte Gebilde als Punktgebilde auffasst, so erkennt man, dass dasselbe auf dem Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ liegt. Besitzt nun diese Kurve α_1-mal 2 konsekutive Punkte, α_k-mal $k+1$ konsekutive Punkte auf dem unendlich fernen Kugelkreis, so ist die Klasse C' der transformierten Kurve:

(17) $$C' = 2(R - M) - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - \ldots;$$

denn die Zahl C' ist gleich der Anzahl der gemeinschaftlichen, beweglichen Tangenten der beiden Kurven, welche man erhält, wenn man den unendlich fernen Kugelkreis und unsere durch das System (4) definierte Kurve auf eine beliebige Ebene von einem beliebigen Punkt aus projiciert. Die Klasse der einen dieser ebenen Kurven ist gleich zwei, die der anderen gleich R. Die Zahl $2M$ ist abzuziehen, weil der Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, auf dem die Kurve des Systems (4) gelegen ist, Mfach zu denken ist, da jeder Strahl dieses Kegels unsere Kurve in M Punkten schneidet.

Der Rang R' ist gleich dem Grad der Kurve, welche die unendlich ferne Ebene aus der zur transformierten Minimalkurve gehörigen abwickelbaren Fläche ausschneidet.

Man erhält somit:

(18) $$R' = 2M' + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots.$$

Weiter ist die Vielfachheit M' gleich der Anzahl der Tangentialebenen, die man durch eine beliebige Tangente des unendlich fernen Kugelkreises an die Kurve des Systems (4) legen kann. Abzuziehen ist die Zahl M. Folglich ist:

(19) $$M' = R - M - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 - \ldots..$$

Aus den Formeln (17) bis (19) folgt:

(20) $$R' - M' = R - M \text{ und:}$$

(21) $$R' = 2(R - M) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots).$$

Ist R' und C' bekannt, so lässt sich auch m' vermöge der Relation: $m' + C' - 2R' + 2 - 2p = 0$ berechnen, da das Geschlecht der transformierten Kurve gleich demjenigen der alten ist.

§ 5. Die Gleichungen der Minimalflächen in Punkt- und Ebenenkoordinaten.

1. Eine Minimalfläche ist bestimmt, wenn man die beiden Minimalkurven kennt, welche die Minimalfläche durch Translationsbewegung erzeugen. Bezeichnet man die rechten Seiten der Ausdrücke (2) respektive mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 und mit Φ_1, $(-\Phi_2)$, Φ_3, Φ_4 die entsprechenden Ausdrücke in den Variabeln $\varkappa'$, λ', μ' für eine zweite Minimalkurve, so stellen die Gleichungen:

$$(22) \qquad x = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} + \frac{\Phi_1}{\Phi_4}, \; y = \frac{\varphi_2}{\varphi_4} - \frac{\Phi_2}{\Phi_4}, \; z = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$$

mit den Beziehungen $f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$ und $f'(\varkappa', \lambda', \mu') = 0$ eine algebraische Minimalfläche dar. Hiebei ist $f' = 0$ die charakteristische ebene Kurve für die zweite Minimalkurve.

Macht man noch die Gleichungen (22) mit t homogen, so erhält man für die Punktkoordinaten einer algebraischen Minimalfläche folgende Ausdrücke:

$$(23) \qquad \begin{aligned} \rho x &= \varphi_1\Phi_4 + \varphi_4\Phi_1, \; \rho y = \varphi_2\Phi_4 - \varphi_4\Phi_2, \\ \rho z &= \varphi_3\Phi_4 + \varphi_4\Phi_3, \; \rho t = \varphi_4\Phi_4 \end{aligned}$$

mit den Beziehungen:

$$f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \; f'(\varkappa', \lambda', \mu') = 0.$$

2. Wir denken uns aus $f = 0$ und $f' = 0$ die Werte für λ und λ' in die Gleichungen (22) eingesetzt, μ und μ' gleich eins gesetzt und die Fläche mit der Ebene:

$$ux + vy + wz + \vartheta = 0 \text{ geschnitten.}$$

Das Bild der Schnittkurve erhält man, wenn man für x, y, z die Werte im System (22) in die letzte Gleichung einsetzt. Soll diese Ebene berühren, so muss das Bild einen Doppelpunkt besitzen, d. h. es muss sein:

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + \vartheta &= 0 = A \\ u\frac{\partial x}{\partial \varkappa} + v\frac{\partial y}{\partial x} + w\frac{\partial z}{\partial \varkappa} &= 0 = \frac{\partial A}{\partial \varkappa} \\ u\frac{\partial x}{\partial \varkappa'} + v\frac{\partial y}{\partial \varkappa'} + w\frac{\partial z}{\partial \varkappa'} &= 0 = \frac{\partial A}{\partial \varkappa'} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$(24) \qquad u : v : w : \vartheta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 - \varkappa^2 & +i(1 + \varkappa^2) & 2\varkappa & 0 \\ 1 - \varkappa'^2 & -i(1 + \varkappa'^2) & 2\varkappa' & 0 \end{vmatrix},$$

da $\frac{\partial A}{\partial x}$ und $\frac{\partial A}{\partial x'}$ respektive sind:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &u(1-x^2) + iv(1+x^2) + 2wx, \\ &u(1-x'^2) - iv(1+x'^2) + 2wx'. \end{aligned}$$

Man erhält dann für die Ebenenkoordinaten u, v, w, ϑ:

$$(26)\qquad \begin{aligned} \rho u &= x + x' \\ \rho v &= -i(x - x'), \\ \rho w &= xx' - 1, \\ \rho\vartheta &= 4(x\lambda' + x'\lambda) - 2(xx' + 1)\left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda'}{dx'}\right), \end{aligned}$$

oder in den 2 Gruppen homogener Variabelen (x, λ, μ), (x', λ', μ')

$$(27)\qquad \begin{aligned} \rho u &= (x\mu' + \mu x')f_2 f'_2 \\ \rho v &= -i(x\mu' - \mu x')f_2 f'_2, \\ \rho w &= (xx' - \mu\mu')f_2 f'_2, \\ \rho\vartheta &= 4(x'\lambda + x\lambda')f^2 f'^2 + 2(xx' + \mu\mu')(f_1 f'_2 + f'_1 f_2), \end{aligned}$$

mit den Beziehungen $f(x, \lambda, \mu) = 0$ und $f(x', \lambda', \mu') = 0$.

Die Gleichungen (26) werden wir bei transcendenten, die Gleichungen (27) bei algebraischen Minimalflächen verwenden.

§ 6. Ueber die Abbildung der algebraischen Minimalflächen.

Wir untersuchen die Gleichungssysteme (22) und (27) genauer: Jedem Punkte der Kurve $f = 0$ entspricht eine Minimalkurve der Schar, welche durch $f' = 0$ bestimmt ist, und jedem Punkte der Kurve $f' = 0$ entspricht eine Minimalkurve der anderen Schar. Jedem beliebigen Punktepaar (x, λ, μ) und (x', λ', μ') entspricht im allgemeinen ein Punkt der Fläche.

Ebenso entspricht im Gleichungssystem (27) jedem Punkt der einen Kurve die abwickelbare Fläche längs einer Minimalkurve. Jedem Punktepaar entspricht eine Tangentialebene der Fläche. Da im ganzen ∞^4 Punktepaare der Kurven $f = 0$ und $f' = 0$ existieren, so erhält man ∞^4 Punkte (Tangentialebenen) der Fläche, entsprechend der vierfachen Ausdehnung einer Fläche, wenn man die imaginären Elemente derselben mitrechnet.

Umgekehrt entspricht im allgemeinen jedem Punkte der Fläche ein Punktepaar (x, λ, μ) und (x', λ', μ') der Kurven $f = 0$ und $f' = 0$. Es kann jedoch vorkommen, dass jedem Punkte (Tangentialebene) der Fläche zwei Punktepaare entsprechen. Diese Gattung von Minimalflächen hat Herr Prof. Lie mit dem Namen »Doppelflächen« bezeichnet.

Man kann fragen, wie vieldeutig die Abbildung der Minimalflächen in die Geraden einer Ebene ist:

Verbindet man die Punktepaare durch gerade Linien, so entspricht jedem Punkte der Fläche eine Gerade. Jeder Geraden entsprechen aber m' Punkte (Tangentialebenen) auf der Fläche. Die Abbildung in die Geraden einer Ebene ist also eine $(1 — m')$-deutige. Unter Umständen lassen sich die Kurven $f = 0$ und $f' = 0$ in Kurven niederer Ordnung transformieren, so dass die Vieldeutigkeit vermindert wird. Sind insbesondere die Kurven $f = 0$ und $f' = 0$ rationale Kurven, so lässt sich die zugehörige Minimalfläche ein — eindeutig auf die Ebene abbilden.

Es ist bekannt, dass man eine reelle Minimalfläche erhält, wenn man mit einer erzeugenden Minimalkurve die konjugierte verbindet. In diesem Falle sind auch die Kurven $f = 0$ und $f' = 0$ konjugierte Kurven. Will man reelle Punkte der Fläche erhalten, so hat man Punktepaare zu nehmen, die zu einander konjugiert sind.

§ 7. Ueber die „Doppelflächen".

Man erhält nach den Herren Darboux und Lie eine Minimalkurve, die zu sich selbst konjugiert ist und eine reelle Doppelfläche erzeugt, wenn die Gleichung $F(u, v, w, \vartheta) = 0$ in § 1 eine reelle Fläche darstellt. Die Kurve $f = 0$ muss dann eine Transformation in die zu ihr konjungierte zulassen. Die Transformation ist eine Transformation der Kurve in sich, wenn $f = 0$ reelle Koefficienten besitzt. Man erhält noch mehr Kurven mit Transformationen in sich, wenn man den unendlich fernen Kugelkreis durch eine Fläche ersetzt, die imaginär ist, aber reelle Koefficienten besitzt, und alles übrige ungeändert lässt.

Die Formeln, welche für unsere Transformation gelten, sind nach Herrn Darboux (Théorie des surfaces, tome I):

(28) $\qquad \varkappa\varkappa' + 1 = 0$ und:

(29) $\qquad \lambda + \varkappa^2\lambda' + A\varkappa^2 + B\varkappa + C = 0.$

Man hat also den Satz:

Liefert die charakteristische Funktion $f = 0$ eine Doppelfläche, so kann man die A, B, C so bestimmen, dass die Kurve $f = 0$ durch die Transformationsformeln (28) und (29) in die konjungierte Kurve übergeht. Hat die Kurve $f = 0$ reelle Koeffizienten, so führen obige Formeln die Kurve in sich über.

Wir setzen, was erlaubt ist, voraus, dass die Kurve $f = 0$ so

gewählt sei, dass die A, B und C in (29) gleich Null sind. Dann erhält man denselben Punkt der Doppelfläche, wenn man das einemal setzt:

$$\varkappa = \varkappa_0,\ \lambda = \lambda_0,\ \mu = 1;$$
$$\varkappa' = \varkappa'_0,\ \lambda' = \lambda'_0,\ \mu' = 1,$$

das anderemal $\varkappa = -\frac{1}{\varkappa'_0},\ \lambda = -\frac{\lambda'_0}{\varkappa'^2_0},\ \mu = 1;$

$$\varkappa' = -\frac{1}{\varkappa_0},\ \lambda' = -\frac{\lambda_0}{\varkappa_0^2},\ \mu' = 1.$$

Durch die Substitutionen:

$$(30)\qquad \varkappa - \frac{1}{\varkappa'} = \sigma_1,\ \varkappa' - \frac{1}{\varkappa} = \sigma_2,$$
$$\lambda - \frac{\lambda'}{\varkappa'^2} = \tau_1,\ \lambda' - \frac{\lambda}{\varkappa^2} = \tau_2$$

kann man die Gleichungen (22), (23) und (26), (27) und $f = 0$ und $f' = 0$ so transformieren, dass jedem Punkte der Fläche nur ein einziges Wertsystem $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ entspricht.

Ist die Vielfachheit M des unendlich fernen Kugelkreises in der abwickelbaren Fläche der Minimalkurve gleich eins, so lässt sich die letztere durch rationale Funktionen von $\varkappa$ allein darstellen. Die Koordinaten der Fläche können dann durch rationale Funktionen von σ_1 und σ_2 dargestellt werden. Man hat hier den zweiten Typus der Transformation einer Ebene in sich von Herrn Bertini vor sich [1]). Handelt es sich um die Bestimmung von Ordnung, Klasse und sonstigen Charakteren, so hat man in allen Fällen, wo mit den Punktepaaren $(\varkappa, \lambda, \mu)$, $(\varkappa', \lambda', \mu')$ operiert wird, in Folge der Ergebnisse dieses Paragraphen die Hälfte der erhaltenen Zahlen zu nehmen.

§ 8. Ueber ausgezeichnete Kurven und Punkte auf den Minimalflächen.

Es gibt Punktepaare von f und f', denen ganze Linien der Fläche entsprechen. Für sie müssen die rechten Seiten der Gleichungen (23) zugleich verschwinden. Dies ist der Fall für die Schnittpunkte von $\varphi_4 = 0$ (oder $f_2 = 0$) mit $f = 0$ und von $f'_2 = 0$ mit $f' = 0$. Für diese Punktepaare darf jedoch nicht zugleich φ_1, Φ_1, φ_2, Φ_2, φ_3, Φ_3 gleich Null sein. Diese Punktepaare stellen in der unendlich fernen Ebene Kurven dar, weil in ihrer Umgebung

1) Annali di Mathemat., Band 8.

t in höherer Ordnung unendlich klein ist, als x, y, z. Die Kurven sind sämmtlich gerade Linien, denn sie liegen in der zweiten Ebene:

$$0 = \begin{vmatrix} x\varphi_1 & \Phi_1 \\ y\varphi_2 & \Phi_2 \\ z\varphi_3 & \Phi_3 \end{vmatrix},$$

wo die φ und Φ für unsere Punktepaare ganz bestimmte Werte besitzen.

Man kann fragen, ob eine Minimalfläche konische Knotenpunkte im Endlichen besitzen kann. Gibt es solche, so gehen durch sie sämtliche Minimalkurven der einen Schar. Der Tangentialkegel eines Knotenpunktes enthält somit den unendlich fernen Kugelkreis. Die Bedingung für einen konischen Knotenpunkt ist daher nach dem System (27):

$$u^2 + v^2 + w^2 = \begin{cases} (\varkappa\mu' + \mu\varkappa')^2 - (\varkappa\mu' - \mu\varkappa')^2 \\ + (\varkappa\varkappa' - \mu\mu')^2 \end{cases} f_2^2 f_2'^2 = 0$$

oder:

$$(\varkappa\varkappa' + \mu\mu')^2 f_2^2 f_2'^2 = 0.$$

Für $\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \rho u &= \varkappa\mu' + \mu\varkappa', \\ \rho v &= -i(\varkappa\mu' - \mu\varkappa'), \\ \rho w &= \varkappa\varkappa' - \mu\mu', \\ \rho\vartheta &= 4(\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda) \end{aligned}$$

mit den Beziehungen $\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0$, $F = 0$ und $f' = 0$.

Die Gleichung $\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0$ stellt nach Clebsch-Lindemann pag. 446, Formel (13) im Allgemeinen eine Kurve von der Ordnung $mM' + m'M$ dar. Man hat nämlich bei der Ermittlung der Ordnung die Zahl der Punktepaare zu bestimmen, welche auf den Kurven $f.f' = 0$, $f = 0$, $f' = 0$ liegen und gleichzeitig der Korrespondenzgleichung $\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0$ und einer Korrespondenzgleichung genügen, welche aus einer linearen Kombination der Ausdrücke (23) besteht. Die Zahl der Punktepaare, welche auf $F = 0$ und $f' = 0$ liegen ist von der Zahl der Punktepaare, welche auf $f.f' = 0$ liegen abzuziehen. Die Kurve ist Rückkehrkante und Minimalkurve, weil sie sämtliche Minimalkurven beider Scharen umhüllt. Doppelflächen sind hier ausgeschlossen.

Im allgemeinen besitzen also algebraische Minimalflächen keine konischen Knotenpunkte im Endlichen. Besitzen sie solche, so muss die Gleichung $\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0$ einen Punkt auf der Fläche darstellen. Dies ist der Fall nur für Minimalflächen von der Form:

$x = i[A(\varkappa) - A(\varkappa')]$, $y = i[B(\varkappa) - B(\varkappa')]$, $z = i[C(\varkappa) - C(\varkappa')]$, wenn

$$x = A(\varkappa) + A(\varkappa'),\ y = B(\varkappa) + B(\varkappa'),\ z = C(\varkappa) + C(\varkappa')$$

eine Doppelfläche darstellt.

§ 9. Ordnung und Klasse der algebraischen Minimalflächen.

Um die Ordnung zu bestimmen, schneiden wir die Fläche mit einer beliebigen Geraden.

Ihre Gleichungen seien:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0 \text{ und}$$
$$b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0.$$

Zur Bestimmung der den Schnittpunkten dieser Geraden entsprechenden Punktepaare erhalten wir aus den Ausdrücken (22) die Gleichungen:

$$a_1\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_4} + \frac{\Phi_1}{\Phi_4}\right) + a_2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_4} - \frac{\Phi_2}{\Phi_4}\right) + a_3\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\Phi_3}{\Phi_4}\right) + a_4 = 0,$$
$$b_1\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_4} + \frac{\Phi_1}{\Phi_4}\right) + b_2\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_4} - \frac{\Phi_2}{\Phi_4}\right) + b_3\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\Phi_3}{\Phi_4}\right) + b_4 = 0.$$

Setzt man:

$$\frac{a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3}{\varphi_4} + a_4 = \xi,$$

(32)
$$\frac{b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_4}{\varphi_4} + b_4 = \eta,$$

$$f(\varkappa, \lambda, \mu) = 0 \text{ und:}$$

$$\frac{a_1\Phi_1 - a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3}{\Phi_4} = -\xi,$$

(33)
$$\frac{b_1\Phi_1 - b_2\Phi_2 + b_3\Phi_3}{\Phi_4} = -\eta,$$

$$f(\varkappa', \lambda', \mu') = 0,$$ so kann man ξ und η als die Koordinaten der Kurven auffassen, deren Gleichungen man erhält, wenn man aus den Gleichungen (32) und (33) $(\varkappa, \lambda, \mu)$ und $(\varkappa', \lambda', \mu')$ eliminiert.

Die Zahl der gemeinschaftlichen Punkte dieser beiden Kurven ist gleich der Ordnung N der Fläche. Abzuziehen ist die Zahl der gemeinschaftlichen Punkte im Unendlichen, weil für sie auch x, y, z unendlich würden, was sich durch passende Wahl der Grössen a und b stets verhindern lässt. Die Ordnungen unserer beiden Kurven sind gleich den Ordnungen m und m' der beiden erzeu-

genden Minimalkurven. Ist die Zahl der gemeinschaftlichen Punkte im Unendlichen gleich δ, so ist die Ordnung N der Fläche:

$$(34) \qquad \begin{aligned} N &= mm' - \delta, \text{ bei Doppelflächen} \\ N &= \tfrac{1}{2}\,(mm' - \delta). \end{aligned}$$

Für die unendlich fernen Punkte unserer beiden, durch die Gleichungen (32) und (33) definierten Kurven ist φ_4 und Φ_4 gleich Null. Die Asymptotenrichtungen gegen die X-axe seien α und α'. Dann ist:

$$(35) \qquad tg\alpha = \frac{a_1(\mu^2 - \varkappa^2) + a_2(\mu^2 + \varkappa^2) + 2a_3\varkappa\mu}{b_1(\mu^2 - \varkappa^2) + b^2(\mu^2 + \varkappa^2) + 2b_3\varkappa\mu},$$

$$(36) \qquad tg\alpha' = \frac{a_1(\mu'^2 - \varkappa'^2) - a_2(\mu'^2 + \varkappa'^2) + 2a_3\varkappa'\mu'}{b_1(\mu'^2 - \varkappa'^2) - b_2(\mu'^2 + \varkappa'^2) + 2b_3\varkappa'\mu'};$$

damit nun $tg\alpha = tg\alpha_1$ sei, muss die Beziehung bestehen:

$$\varkappa\varkappa' + \mu\mu' = 0.$$

Um also zu bestimmen, ob unsere beiden Kurven im Unendlichen Punkte gemeinsam haben, wird man die beiden, in $\varkappa$, μ und $\varkappa'$, μ' resp. homogenen Gleichungen $m$ten und m'ten Grades aufstellen, welche die unendlich fernen Punkte für jede der beiden Kurven bestimmen. Ist dann für die erste Gleichung $\frac{\varkappa}{\mu} = a$ eine Wurzel und $\frac{\mu'}{\varkappa'} = -a$ Wurzel der anderen Gleichung, so haben unsere beiden Kurven einen Punkt im Unendlichen gemeinschaftlich. Es ist dann noch weiter das Verhalten der beiden Kurven in diesem gemeinschaftlichen Punkt zu untersuchen, da in ihn mehrere Schnittpunkte hereinfallen können, um die Zahl δ zu erhalten.

2. Die Klasse ergiebt sich aus dem Gleichungssystem (27) in Verbindung mit dem Tangentialkegel, der bestimmt ist durch die Gleichung:

$$(1 - a^2)u + i(1 + a^2)v + 2aw = 0.$$

Die Spitze dieses Kegels liegt auf dem unendlich fernen Kugelkreis wegen $(1-a^2)^2 - (1 + a^2) + 4a^2 = 0$.
Die Bilder desselben sind:

$$\varkappa + a\mu = 0 \text{ und } a\varkappa' + \mu' = 0.$$

Derselbe zerfällt somit in $M + M'$ Tangentialkegel, welche die Fläche nach Minimalkurven berühren.

Die Klasse k eines Kegels, der einem Punkte von $f = 0$ und $\varkappa + a\mu = 0$ entspricht, ist, wie man leicht aus dem Gleichungssystem (27) ersieht;

$$k = n'^2 - 2d' - 3r' - (n' - M') - \alpha' - \beta'$$

Nun ist ist nach § 4, Formel (13):

$$R' = n'(n' + 1) - 2d' - 3r' - 2(n' - M') - \alpha' - \beta'.$$

Hieraus folgt:

$$k = R' - M'.$$

Ebenso ist die Klasse k' eines Kegels der einem Schnittpunkt von $a\varkappa' + \mu = 0$ und $f' = 0$ entspricht:

$$k' = R' - M'.$$

Die Klasse K der Minimalfläche ist gleich der Summe der Klassen unserer $(M + M')$ Kegel.

Man erhält somit:

$$K = M(R' - M) + M'(R - M). \tag{37}$$

§ 10. Ueber eine Erzeugungsweise der Minimalflächen.

Aus den Gleichungen (25) in § 5 folgt, dass die Ebene

$$ux + vy + wz + \vartheta = 0,$$

d. h. die Gleichung der Tangentialebene der Minimalflächen senkrecht steht auf der Geraden, welche durch den Schnitt zweier beliebigen Schmiegungsebenen der beiden erzeugenden Minimalkurven entsteht. Die Gleichungen dieser Geraden sind nämlich ($\mu = 1$ gesetzt):

$$x(1 - \varkappa^2) + iy(1 + \varkappa^2) + 2\varkappa z + 4\lambda = 0 \text{ und:}$$
$$\varkappa(1 - \varkappa'^2) - iy(1 + \varkappa'^2) + 2\varkappa' z + 4\lambda' = 0.$$

Diese Geraden bilden ein Strahlensystem, dessen Brennfläche die beiden abwickelbaren Flächen der erzeugenden Minimalkurven sind. Es wird sich zeigen, dass die Tangentialebene der Minimalfläche in den Mittelpunkten dieser Strahlen senkrecht auf letzteren stehen.

Sind nämlich ξ, η, ζ die Koordinaten dieser Mittelpunkte, so lässt sich ohne Mühe nachweisen, dass sie bestimmt sind durch die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi(1 - \varkappa^2) + i\eta(1 + \varkappa^2) + 2\varkappa\zeta + 4\lambda &= 0, \\ \xi(1 - \varkappa'^2) - i\eta(1 + \varkappa'^2) + 2\varkappa'\zeta + 4\lambda' &= 0, \end{aligned} \tag{38}$$

$$0 = \xi(\varkappa + \varkappa') - i\eta(\varkappa - \varkappa') + \zeta(\varkappa\varkappa' - 1) + \tfrac{1}{2}\Big\{4(\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda) - 2\left(\frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\varkappa'}{d\varkappa'}\right)(1 + \varkappa\varkappa')\Big\}$$

Die letzte dieser Gleichungen stimmt mit der Gleichung der Tangentialebene der Minimalfläche überein, wie man aus dem System (26) ersieht, wenn man statt x, y, z . . $2x$, $2y$, $2z$ setzt, was einer Aehnlichkeitstransformation der Minimalfläche gleichkommt.

Man hat also den Satz:

Errichtet man in den Mittelpunkten eines Strahlensystems, dessen Brennflächen abwickelbare Flächen sind, für welche die Rückkehrkanten die Länge Null haben, auf seinen Strahlen senkrechte Ebenen, so umhüllen diese eine Minimalfläche. (Vergl. Ribaucour, Mémoires couronnés, t. 45).

Die Minimalfläche ist algebraisch, wenn das Strahlensystem algebraisch ist; im anderen Falle ist die Fläche transcendent.

Da man statt $\lambda \ldots \lambda + \alpha\varkappa^2 + \beta\varkappa + \gamma$ und statt $\lambda' \ldots \lambda' + \alpha'\varkappa'^2 + \beta'\varkappa' + \gamma'$, wo die α', β', γ' Funktionen von α, β, γ sind, setzen kann, ohne die Gestalt und Lage der Minimalfläche zu ändern, so gibt es, da α, β, γ beliebige Grössen sind, ∞^3 Strahlensysteme, die zu derselben Minimalfläche Veranlassung geben.

Fasst man die Schnittkurve der beiden Brennflächen eines solchen Strahlensystems ins Auge, so ergeben sich sofort die Sätze von den Herren Henneberg und Lie (Math. Ann., B. 15). Ich unterlasse daher weitere Betrachtungen.

§ 11. Ueber das zu einer Minimalfläche gehörige Strahlensystem.

Aus den Gleichungen (38) erhält man für die Koordinaten der »Mittelfläche« des Strahlensystems folgende Ausdrücke (in homogener Schreibweise):

$$
\begin{aligned}
\rho\xi &= 2(\lambda + \lambda') - (\varkappa + \varkappa')\left(\frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right),\\
\rho\eta &= i\left\{2(\lambda' - \lambda) + (\varkappa - \varkappa')\left(\frac{d\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d\varkappa'}{d\varkappa'}\right)\right\},\\
\rho\zeta &= 2(\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda) - (\varkappa\varkappa' - 1)\left(\frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right),\\
\rho\tau &= -(\varkappa\varkappa' + 1).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche ein Strahl des Systems mit den Koordinatenaxen einschliesst, so ist:

$$
\cos\alpha = \frac{\varkappa + \varkappa'}{\varkappa\varkappa' + 1},\quad \cos\beta = -i\frac{\varkappa - \varkappa'}{\varkappa\varkappa' + 1},\quad \cos\gamma = \frac{\varkappa\varkappa' - 1}{\varkappa\varkappa' + 1}.
\tag{40}
$$

Die Gleichungen des Strahlensystems sind daher, wenn man mit r den Abstand eines Punktes auf einem Strahle von seinem Mittelpunkte bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
\xi &= -2\frac{\lambda + \lambda'}{\varkappa\varkappa' + 1} + \cos\alpha\left(r + \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right),\\
\eta &= \left\{i\frac{2(\lambda - \lambda')}{\varkappa\varkappa' + 1} + \cos\beta\left(r + \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$\zeta = -2\frac{\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda}{\varkappa\varkappa' + 1} + cos\gamma\left(r + \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right),$$

oder, wenn man statt r setzt:

$$r = r' - \frac{d\lambda}{d\varkappa} - \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}:$$

$$\xi = -2\frac{\lambda + \lambda'}{\varkappa\varkappa' + 1} + r' cos\alpha,$$

(42) $$\eta = -2i\frac{\lambda' - \lambda}{\varkappa\varkappa' + 1} + r' cos\beta,$$

$$\zeta = -2\frac{\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda}{\varkappa\varkappa' + 1} + r' cos\gamma.$$

Wendet man behufs Untersuchung unseres Strahlensystems die Bezeichnungen in Salmon's Raumgeometrie II, 3. Auflage, pag. 223 u. f. an, so erhält man für das letzte Gleichungssystem (42):

$$E = G = 0,\ F = 2(1 + \varkappa\varkappa')^{-2},$$

$$e = g = 0,\ f + f' = -4(1 + \varkappa\varkappa')^{-2}\left(\frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right),$$

$$r' = \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}.$$

Es ist also r' unabhängig von $\frac{d\varkappa}{d\varkappa'}$.

Die kürzesten Abstände r' eines Strahles von dem ihm benachbarten liegen somit in einer Ebene und die »Flächen der Grenzpunkte« der kürzesten Abstände fallen mit der Mittelfläche des Strahlensystems zusammen.

Umgekehrt fragt es sich, ob jedem Strahlensystem, das die obige Eigenschaft besitzt, eine Minimalfläche entspricht.

Es ist erlaubt vorauszusetzen, dass dem Werte $r = 0$ eine Brennfläche entspricht, indem man auf der letzteren die Anfangspunkte der Strahlen annimmt. Man hat dann die Bedingungsgleichungen:

$$E = G = e = g = f = 0 \text{ oder:}$$

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = 0 \text{ und } \mathrm{a}'^2 + \mathrm{b}'^2 + \mathrm{c}'^2 = 0,$$

$$a\,\mathrm{a}' + b\,\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = 0,$$

$$a'\mathrm{a}' + b'\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = 0,$$

$$a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(ab' - ba')^2 + (cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 = 0$$

oder nach den Bezeichnungen von Salmon, Raumg. pag. 70:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Die Oberfläche unserer Brennfläche ist bestimmt durch:

$$\int d\varkappa\, d\varkappa' \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

In unserem Falle sind somit die Brennflächen des Strahlensystems Flächen von dem Flächeninhalt Null.

Hat die Gleichung der Fläche die Form $z = F(x, y)$, so ist die Differentialgleichung unserer Brennfläche in den bekannten Bezeichnungen folgende:

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt bekanntlich abwickelbare Flächen, deren Tangentialebene den unendlich fernen Kugelkreis berühren.

Man hat also den Satz:

Errichtet man auf den Strahlen eines Strahlensystems, bei welchem die »Grenzflächen« mit der »Mittelfläche« zusammenfallen, in den Mittelpunkten dieser Strahlen senkrechte Ebenen, so umhüllen diese eine Minimalfläche.

§ 12. Transcendente Minimalflächen, auf welchen eine Schar algebraischer Kurven liegt.

Herr Prof. Schwarz hat solche Flächen im 80ten und 87ten Band des Crelle'schen Journals behandelt.

Die im letzteren Band angegebenen Gleichungen für diese Gattung von Flächen benützt Herr Götting, um Minimalflächen zu bestimmen, auf denen Kurven sechster Ordnung liegen [1]).

Natürlich sind unter diesen Flächen auch diejenigen enthalten, die von einer Schar algebraischer Developpabelen umhüllt werden, da zwei aufeinanderfolgende Developpabelen sich in einer algebraischen Kurve schneiden und unsere Gattung von Flächen immer von einer Schar abwickelbaren Flächen berührt wird.

Ich will nun einige Fälle angeben, in denen man leicht Flächen der besprochenen Art bestimmen kann.

Die Gleichungen der erzeugenden Minimalkurve seien (vergleiche Ausdrücke (1)):

$$x = (1 - \varkappa^2)\frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} + 2\varkappa\frac{d\lambda}{d\varkappa} - 2\lambda,$$

$$y = i\left\{(1 + \varkappa^2)\frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} - 2\varkappa\frac{d\lambda}{d\varkappa} + 2\lambda\right\},$$

1) Götting, Dissert. Göttingen: „Ueber Minimalflächen, welche eine Schar algebraischer Kurven enthalten".

$$z = 2\varkappa \frac{d^2\lambda}{d\varkappa^2} + 2\frac{d\lambda}{d\varkappa}.$$

Ferner ist in den Gleichungen für die Ebenenkoordinaten der Minimalfläche der Ausdruck für $\rho . \vartheta$ (Gleichungssystem (26)):

$$\rho\vartheta = 4(\varkappa'\lambda + \varkappa\lambda') - 2(\varkappa\varkappa' + 1)\left(\frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{d\lambda'}{d\varkappa'}\right).$$

Setzt man nun $\varkappa \frac{d\lambda}{d\varkappa} - \lambda$ gleich einer algebraischen Funktion $A(\varkappa)$ von $\varkappa$, so erhält man stets eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Kurven besitzt und von einer Schar algebraischer Developpabelen umhüllt wird, wenn die Funktion $A(\varkappa)$ die Eigenschaft besitzt, dass $\int \frac{A}{\varkappa^2} d\varkappa$ eine transcendente Funktion ist, für die ein algebraisches Additionstheorem besteht. Denn dann sind die x — und die y — Koordinate algebraische Funktionen von $\varkappa$, die z — Koordinate eine algebraische Funktion von $\varkappa$ plus der transcendenten Funktion $\int \frac{A}{\varkappa^2} d\varkappa$. Setzt man in gleicher Weise: $\varkappa' \frac{d\lambda'}{d\varkappa'} - \lambda' = A(\varkappa')$, wo A' dieselbe Funktion von $\varkappa'$ ist, wie A von $\varkappa$, beziehungsweise die konjugierte zu A, so ist die z — Koordinate der Minimalfläche eine algebraische Funktion der Variabelen $\varkappa$ und $\varkappa'$ plus der transcendenten Funktion

$$\int \frac{A(\varkappa)}{\varkappa^2} d\varkappa + \int \frac{A'(\varkappa')}{\varkappa'^2} d\varkappa.$$

Setzt man nun die letztere einer Konstanten c gleich, so erhält man für jedes c eine algebraische Kurve auf der durch die Funktion $A(\varkappa)$ definierten Fläche, da zwischen $\varkappa$, $\varkappa'$ und c eine algebraische Beziehung bestehen soll. Man erkennt leicht, dass dann auch der Ausdruck für $\rho . \vartheta$ für jedes c zu einem algebraischen gemacht werden kann.

Funktionen $\int \frac{A}{\varkappa^2} d\varkappa$, welche die bezeichnete Eigenschaft besitzen, sind die Integralfunktionen für den Logarithmus, für die cyclometrischen Funktionen und die elliptischen Integrale erster Art, nebst sämtlichen Funktionen, welche durch eine algebraische Transformation in die genannten Funktionen übergehen.

Da im Allgemeinen die Funktion $A(\varkappa)$ auf elliptische Funktionen führt, so wird es zweckmässig sein, dieselben sogleich in die Gleichungen für die Minimalkurven einzuführen.

Die Gleichungen der Minimalkurven seien (Ausdrücke (1)):

$$(43)\qquad \begin{aligned} x &= \int (1 - s^2)\, F'''(s)\, ds, \\ y &= -i \int (1 + s^2)\, F'''(s)\, ds, \\ z &= 2 \int s\, F'''(s)\, ds. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$(44)\qquad \sin u = i\,\frac{1 - s^2}{2s},\quad \cos u = \frac{1 + s^2}{2s},\ \text{so folgt:}$$

$$du = -i\,\frac{ds}{s},\quad s = e^{ui}\,.$$

Die Gleichungen (43) gehen dann in folgende über:

$$(45)\qquad \begin{aligned} x &= 2 \int \sin u \,.\, e^{2iu} F'''(e\ )du = \int \sin u\, \varphi(u)\, du, \\ y &= 2 \int \cos u \,.\, e\ \ F'''(e\ )du = \int \cos u\, \varphi(u)\, du, \\ z &= 2i \int \qquad e\ \ F'''(e^i\ )du = i \int \varphi(u)\, du. \end{aligned}$$

Setzt man weiter:

$$(46)\quad \sin u = k'\,\frac{sn\varkappa}{dn\varkappa},\ \cos u = \frac{cn\varkappa}{dn\varkappa}\quad s = \frac{cn\varkappa + ik' sn\varkappa}{dn\varkappa},\ \text{so folgt:}$$

$du = \dfrac{k' d\varkappa}{dn\varkappa}$. Mittelst dieser Substitution gehen die Gleichungen (45) in folgende über:

$$(47)\qquad \begin{aligned} x &= 2 \int k' sn\varkappa \,.\, \frac{s^2}{dn^2\varkappa}\, F'''(s) d\varkappa, \\ y &= 2 \int cn\varkappa \,.\, \frac{s^2}{dn^2\varkappa}\, F'''(s) d\varkappa, \\ z &= 2i \int dn\varkappa \,.\, \frac{s^2}{dn^2\varkappa}\, F'''(s) d\varkappa,\ \text{wo} \end{aligned}$$

$s = \dfrac{cn\varkappa + ik' sn\varkappa}{dn\varkappa}$ ist.

Die Gleichungen unserer Minimalkurve sind daher von der Gestalt:

$$(48)\qquad \begin{aligned} x &= k' \int sn\varkappa \,.\, f(\varkappa) d\varkappa, \\ y &= \int cn\varkappa \,.\, f(\varkappa) d\varkappa, \\ z &= i \int dn\varkappa \,.\, f(\varkappa) d\varkappa \end{aligned}$$

und zwar sind dies die allgemeinsten Gleichungen einer Minimalkurve. Dieselbe ist algebraisch, wenn die Funktion $\dfrac{dn^2\varkappa}{s^2}\, f(\varkappa)$ die dritte Ableitung einer algebraischen Funktion in Bezug auf die Grösse $s = \dfrac{cn\varkappa + ik' sn\varkappa}{dn\varkappa}$ ist, im anderen Falle ist sie transcendent.

Wir wollen nun Funktionen $f(\varkappa)$ suchen, welche Minimalflächen mit einer Schar algebraischer Kurven bestimmen.

Eine solche Funktion $f(\varkappa)$ ist z. B.

$f(\varkappa) = \dfrac{1}{dn^2\varkappa}$. Die Gleichungen (45) sind in diesem Falle folgende:

$$x = 2\int \sin u\, du = -2\cos u,$$

(49a) $$y = 2\int \cos u\, du = \quad 2\sin u,$$

$$z = 2i\int du \quad = \quad 2iu \text{ oder in } \varkappa \text{ ausgedrückt:}$$

(49b) $$x = -2\frac{cn\varkappa}{dn\varkappa},\quad y = 2k'\frac{sn\varkappa}{dn\varkappa},$$

$$z = 3\,lg\,\frac{cn\varkappa + ik'sn\varkappa}{dn\varkappa}.$$

Setzt man in den ersten Gleichungen $u = p + iq$ und nimmt für x, y, z die reellen Teile, so stellt $q = const.$ eine algebraische Kurve (Kreis) auf der Fläche dar. Ebenso wird durch die Beziehung

$$\frac{cn\varkappa + ik'\sin\varkappa}{dn\varkappa}\cdot\frac{cn\varkappa' + ik'sn\varkappa'}{dn\varkappa'} = const.$$

dieselbe Kurve dargestellt, wo $\varkappa'$ der Parameter der konjugierten Minimalkurve ist.

Eine weitere Funktion $f(\varkappa)$ ist folgende:
$f(\varkappa) = (\alpha sn\varkappa + \beta cn\varkappa + \gamma dn\varkappa)$, wo den α, β, γ noch gewisse Bedingungen aufzuerlegen sind.

Die Intregation ergibt nämlich:

$$x = \alpha(\varkappa' - E(am\varkappa)) - \beta\frac{k'}{k^2}dn\varkappa - \gamma k'cn\varkappa,$$

(50) $$y = -\frac{\alpha}{k^2}dn\varkappa + \beta\left(-\varkappa\frac{k'^2}{k^2} + \frac{1}{k^2}E(am\varkappa)\right) + \gamma\sin\varkappa,$$

$$z = i\left\{-\alpha cn\varkappa + \beta sn\varkappa + \gamma E(am\varkappa)\right\}.$$

Nach Enneper, ellipt. Funktionen, pag. 223 ist:

$$E[am(p+iq)] - E[am(p-iq)] = 2E[am\,iq] - 2k^2\frac{sn\,iq\,cn\,iq\,dn\,iq\,sn^2p}{1-k^2sn^2psn^2iq}$$ und:

$$E[am(p+iq)] + E[am(p-iq)] = 2E[am\,p] - 2k^2\frac{sn\,p\,cn\,p\,dn\,p\,sn^2iq}{1-k^2sn^2p\,sn^2iq}.$$

Der erste dieser Ausdrücke ist für $q = const.$ eine algebraische Funktion von $sn\,p$ allein, ebenso der zweite Ausdruck für $p = const.$ von $sn\,iq$ allein. Setzen wir nun in den Ausdrücken (50) $\varkappa = p + iq$ und nehmen die reellen Teile derselben, so haben wir, um algebraische Kurven auf der Fläche zu erhalten, die α, β, γ so zu be-

stimmen, dass unsere Ausdrücke für $q = const.$, respektive für $p = const.$ algebraische Funktionen von sn, cn, dn werden.

Man findet, dass die letztere Bedingung erfüllt ist, wenn α und β rein imaginäre Zahlen, γ eine reelle Zahl und $q = const.$ ist. Sind α und β reelle Zahlen, γ rein imaginär, so erhält man für $p = const.$ algebraische Kurven auf der Fläche.

Die durch unsere Funktion $f(\varkappa)$ definirten Flächen sind diejenigen, welche Herr Prof. Schwarz im 80ten Band des Crelleschen Journals behandelt hat.

Treten in der Funktion $f(\varkappa)$ die Funktionen sn, cn, dn zu je zweien mit einander verbunden auf, so erhält man keine Minimalfläche mit einer Schar algebraischer Kurven. Ist aber die Funktion $f(\varkappa)$ eine ternäre Form unserer elliptischen Funktionen, so erhält man wieder Minimalflächen mit algebraischen Kurven.

Man kann als allgemeinste ternäre Form $f(\varkappa)$ folgende annehmen: $f(\varkappa) = dn\varkappa(\alpha\, sn\varkappa cn\varkappa + \beta\, sn\varkappa dn\varkappa + \gamma\, cn\varkappa dn\varkappa + \delta\, dn^2\varkappa)$, aus Gründen die nachher angegeben werden sollen.

Legt man unsere Funktion für die Minimalkurve zu Grunde, so ergibt sich bei der Integration, dass die Koordinaten der Kurve algebraische Funktion von $sn\varkappa$, $cn\varkappa$, $dn\varkappa$ und der Funktion $\int dn^2\varkappa = E(am\varkappa)$ sind; die letztere tritt natürlich nur linear auf.

Die Constanten α, β, γ, δ sind wie im vorigen Falle so zu bestimmen, dass, wenn man wieder $\varkappa = p + iq$ setzt, für $q = vonst.$, respektive für $p = const.$ die Koordinaten der diesen Werten entsprechenden Kurven sich durch algebraische Funktionen der elliptischen Funktionen sn, cn, dn allein ausdrücken.

Da auch hier wieder nur die Funktion $E(am\varkappa)$ neben den anderen elliptischen Funktionen auftritt, so dürfen wir zu unserer ternären Form noch die Form $\alpha' sn\varkappa + \beta' cn\varkappa + \gamma' dn\varkappa$ addieren, wobei noch den α', β', γ' die früher angeführten Bedingungen aufzuerlegen sind. Wir haben dann in unserer ternären Form 7 Constanten; sie ist die allgemeinste, weil sich etwa $sn^3\varkappa$, $cn^3\varkappa$, $dn^3\varkappa$ mittelst der Relation $k'^2 sn^2\varkappa + cn^2\varkappa - dn^2\varkappa = 0$ durch $sn\varkappa\, cn^2\varkappa$, $sn\varkappa\, dn^2\varkappa$, u. s. f. ausdrücken lässt, so dass die ternäre Form statt 10 nur 7 wesentliche Constanten besitzt.

Um noch weitere Minimalflächen zu erhalten, welche eine Schar algebraischer Kurven besitzen, können wir natürlich zu unseren gefundenen Funktionen $f(\varkappa)$ noch eine zweite $f_1(\varkappa)$ additiv hinzufügen. Die Funktion $f_1(\varkappa)$ muss dann die Eigenschaft haben für sich allein eine algebraische Minimalfläche zu bestimmen.

Eine solche Addition ist auch bei den durch die Funktion $A(\varkappa)$ definierten Flächen erlaubt.

II. Anwendungen.

§ 13. Enneper'sche Minimalfläche neunter Ordnung.

Die niedrigste Ordnung einer Minimalkurve, welche eine reelle Minimalfläche, von der Ebene abgesehen, erzeugt, ist gleich drei, ihre Klasse somit gleich drei, ihr Rang gleich vier.

Die Fläche $F = 0$ in § 1 ist von der zweiten Ordnung und hat mit der Fläche $u \equiv u^2 + v^2 + w^2 = 0$ einen Ebenenbüschel gemeinschaftlich. Die Vielfachheit des unendlich fernen Kugelkreises in der abwickelbaren Fläche der Minimalkurve kann daher nur gleich eins sein.

Wir können, um die Kurve $f = 0$ zu bestimmen, die Formeln in § 4 anwenden und erhalten:

$$C = 3 = n + 1 - \alpha \text{ (Formel 15) und}$$
$$R = 4 = n^2 - 2d - 3r - n + 2 - \alpha - \beta \text{ (Formel 13).}$$

Es sind nun folgende Annahmen möglich:

$$n = 2,\ \alpha = 0,\ \beta = d = r = 0;$$
$$n = 3,\ \alpha = 1,\ d = 1,\ \beta = 1,\ r = 0;$$
$$n = 3,\ \alpha = 1,\ r = 1,\ d = \beta = 0.$$

Ihnen entsprechen folgende Kurven $f = 0$:

$$\lambda\,(a\varkappa + b\mu) + a_1\varkappa^2 + b_1\varkappa\mu + 0_1\mu^2 = 0$$
$$\lambda\mu(a\varkappa + b\mu) + a_1\varkappa^3 + \quad . \quad . \quad d_1\mu^3 = 0$$
$$a\lambda\mu^2 + \qquad a_1\varkappa^3 + \quad . \quad . \quad d_1\mu^3 = 0.$$

Alle diese Kurven lassen sich mittelst der Formeln in § 2 in die einfachere Kurve $\lambda\mu^2 - a\varkappa^3 = 0$ transformieren, wo noch $a = 1$ gesetzt werden kann, ohne den Charakter der Minimalkurve zu ändern.

Die Gleichungen der Minimalfläche sind für $\lambda = \varkappa^3$ und für $\varkappa = p + iq$, $\varkappa' = p - iq$:

$$x = 3p - p^3 + 3pq^2,\ y = -3q - 3p^2q + q^3,\ z = 3(p^2 - q^2).$$

Die Elimination von p und q ergibt:

$$[12z + 4z^3 + 9(y^2 - x^2)]^3 = [8z^3 + 18x^2 - 8z]^2 27z.$$

Die Fläche besitzt eine Rückkehrkante 6ter Ordnung (§ 8). Ihr Bild ist:

$$\varkappa\varkappa' + 1 = 0 \text{ oder } p^2 + q^2 + 1 = 0.$$

Weiter muss der Rest der vielfachen Kurve der Fläche eine Kurve 21ter Ordnung sein, weil das Geschlecht eines ebenen Schnittes gleich eins ist, folglich die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte desselben gleich 27.

Wendet man das Verfahren von Clebsch an (vergl. Math. Annalen, B. I), so erhält man für die vielfache Kurve folgende Bildkurve, wenn man p und q vorher mit r homogen gemacht:
$r^6(p^2 - q^2)(p^2 + q^2 + r^2)(3p^2 - q^2 + 3r^2)(p^2 - 3q^2 - 3r^2) = 0$.
$r^6 = 0$ gibt, wenn man auch x, y, z mit t homogen macht, $t = 0$, $z = 0$. Die Gerade zählt dreimal als das dreifache Gerade, somit als Doppelkurve 9ter Ordnung.

Dem Bilde $p^2 - q^2 = 0$ oder $p + q = 0$ und $p - q = 0$ entsprechen die Geraden $z = 0$, $x + y = 0$ und $z = 0$, $x - y = 0$. Beide Geraden zählen dreifach. Nur eine Tangentialebene ist in einem Punkte dieser Geraden reell.

Den beiden Kurven $3p^2 - q^2 + 3r^2 = 0$ und $p^2 - 3q^2 - 3r^2 = 0$ entsprechen ebene Kurven dritter Ordnung mit einem isolierten Doppelpunkt. Sie liegen in den Ebenen $y = 0$ und $x = 0$.

§ 14. Minimalkurven vierter Klasse und die von ihnen erzeugten Minimalflächen.

1. Die allgemeinste Minimalkurve vierter Klasse erhält man, wenn man für $F = 0$ eine Fläche zweiter Ordnung nimmt; denn Flächen dritter Klasse, die mit der Fläche $U \equiv u^2 + v^2 + w^2 = 0$ zwei Ebenenbüschel gemeinsam haben, liefern keine neuen Minimalkurven vierter Klasse.

Bekanntlich besitzt die von der Fläche $U = 0$ und $F = 0$ erzeugte abwickelbare Fläche Kegelschnitte doppelt (Leitlinien der Fläche); ihre Zahl bewegt sich zwischen eins und vier.

Die Fläche zweiten Grades habe folgende Gleichung:

$$F = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + \ldots a_{44}\vartheta^2 = 0.$$

Die Gleichung, welche die Leitlinien bestimmt, lautet dann:

$$L = \begin{vmatrix} a_{11}+l & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+l & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+l & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+0.l \end{vmatrix} = 0$$

(Salmon, Raumgeometrie, I, Art. 67).

In der Gleichung $L = 0$ hat man noch eine Wurzel $l = \infty$ mitzurechnen.

Es können folgende Fälle eintreten:

1) Die Gleichung $L = 0$ besitzt 3 gleiche α) unendliche, β) endliche Wurzeln;

2) sie besitzt zwei gleiche α) unendliche, β) endliche Wurzeln;

3) alle Wurzeln sind ungleich.

Die Charaktere unserer Kurven sind nach Salmon, Raumgeometrie, I, pag. 252 und II, pag. 133 bis 135:

im Falle 1): $C = 4,\ m = 4,\ R = 5;$

im Falle 2): $C = 4,\ m = 6,\ R = 6;$

im Falle 3): $C = 4,\ m = 12,\ R = 8.$

2. Fall $(1, \alpha)$.

Hat die Gleichung $L = 0$ zwei Wurzeln $l = \infty$, so ist immer $a_{44} = 0$, d. h. ϑ kommt in der Gleichung $F = 0$ nur im ersten Grade vor; es kann daher auch λ nur bis zum ersten Grad in der Gleichung $f = 0$ ansteigen; die Zahl M ist somit gleich eins (§ 1).

Wir haben daher nach den Formeln in § 4 für unseren Fall:

$$C = 4 = n + 1 - \alpha,$$
$$R = 5 = n^2 - n - 2d - 3r + 2 - \alpha - \beta.$$

Wir erhalten die Möglichkeit:

$$n = 3,\ \alpha = 0,\ d = 0,\ r = 1,\ \beta = 0.$$

Den Fall $n = 4$ brauchen wir nicht zu behandeln, da die ihm entsprechenden Kurve $f = 0$ sich in eine Kurve dritter Ordnung mittelst der Formeln in § 2 transformieren lässt.

Wir erhalten daher für die Kurve dritter Ordnung $f = 0$ folgende Gleichung:

$$f = 0 = \lambda(\varkappa + a\mu)^2 + a_1\varkappa^3 b_1\varkappa^2\mu + c_1\varkappa\mu^2 + d_1\mu^3$$

oder einfacher:

$$\lambda = \frac{A\mu^3}{(\varkappa + a\mu)^2} + \frac{B\mu^2}{\varkappa + a\mu}.$$

Die Gleichung der Kurve vierter Ordnung würde lauten:

$$f = 0 = \lambda\mu(a\varkappa + b\mu)^2 + a_1\varkappa^4 + b_1\varkappa^3\mu + \ldots e_1\lambda^4.$$

Sämmtliche Minimalkurven unserer Art haben im Unendlichen einen singulären Punkt mit superlinearem Zweig; ferner eine Spitze im Endlichen. Die zugehörigen (reellen) Minimalflächen haben daher zwei Rückkehrkanten der vierten Ordnung; ferner besitzen sie noch eine Rückkehrkante der 8ten Ordnung (§ 8). Die Ordnung der Fläche ist gleich 16.

3. Fall (1,β).

Es ist hier $M = 2$, folglich:

$$C = 4 = n + 2 - \alpha,$$
$$R = 5 = n^2 - n - 2d - 3r - \alpha - \beta;$$

hieraus ergibt sich:

$$n = 2,\ \alpha = 0,\ d = r = 0, \beta = 1 \text{ und}$$
$$n = 3,\ \alpha = 1,\ d = 0,\ r = 1,\ \beta = 1 \text{ und}$$
$$n = 4,\ \alpha = 2,\ d = 0,\ r = 3,\ \beta = 0.$$

Die drei Kurven $f = 0$, die diesen Möglichkeiten entsprechen, lassen sich sämmtliche durch die Formeln in § 2 in einander transformieren. Ich nehme daher die einfachste und allgemeinste nämlich:

$$f = \lambda^2 - a\varkappa\mu - b\mu^2 = 0.$$

Bei genauerer Untersuchung findet man, dass die zugehörige Minimalkurve eine Spitze im Unendlichen besitzt, deren Tangente den unendlich fernen Kugelkreis berührt. Die Elimination von λ aus $f = 0$ und $f_2^3 = 0$ ergibt: $(a\varkappa + b\mu)^3\mu^3 = 0$. Für die unendlich fernen Punkte ist $(a\varkappa + b\mu)^3\mu = 0$. Es folgt hieraus, dass, wenn b von Null verschieden ist, die beiden durch die Gleichungen (32) und (33) definierten Kurven verschiedene Asymptotenrichtung besitzen. Die Ordnung der zu $f = 0$ gehörigen reellen Fläche ist daher gleich 16, wenn $b \lesseqgtr 0$, dagegen 12, wenn $b = 0$ ist. Im letzteren Falle kann man die Minimalfläche darstellen durch die Gleichungen:

$$x = \Re\left[\frac{4}{s^3} + 3s\right]a,$$
$$y = \Re\left[-\frac{4}{s^3} + 3s\right]a,$$
$$z = \Re\,\frac{12a}{s},$$

wo das vorgesetzte $\Re$ die bekannte Bedeutung bei Herrn Weierstrass hat.

4. Fall (2, α).

Für diese Gattung von Minimalkurven ist:

$$C = 4 = n + 1 - \alpha.$$
$$R = 6 = n^2 - n - 2d - 3r + 2 - \alpha - \beta;$$

hieraus folgt:

$$n = 3,\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ d = 1,\ r = 0 \text{ und}$$
$$n = 4,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ d = 2,\ r = 1 \text{ und}$$
$$n = 4,\ \alpha = 1,\ (\beta) = 1,\ d = 3,\ r = 0.$$

(das eingeklammerte β bedeutet hier, dass $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ auf

der Geraden $\mu = 0$ einen Schnittpunkt mit $f = 0$ mehr besitzt, als $f_3 = 0$).

Man erhält dann folgende Gleichungen für die Kurve $f = 0$:

$$f = 0 = \lambda(\varkappa + a\mu)(b\varkappa + c\mu) + a_1\varkappa^3 + b_1\varkappa^2\mu + \ldots,$$
$$\lambda(\varkappa + a\mu)\mu^2 + a_1\varkappa^4 + b_1\varkappa^3\mu + \ldots e_1\mu^4 = 0,$$
$$\lambda\mu(a\varkappa + b\mu)(c\varkappa + d\mu) + a_1\varkappa^4 + b_1\varkappa^3 + \ldots e_1\mu^4 = 0.$$

Die zugehörigen Flächen $F = 0$ lassen sich mittelst der Formeln (5) in § 1 leicht bestimmen, so dass sich auch zugleich entscheiden lässt, ob die zu unserer Kurve $f = 0$ gehörige Minimalkurve eine gewöhnliche Minimalfläche oder eine Doppelfläche erzeugt.

Wir wollen ein einfaches Beispiel (Fläche von Henneberg) wählen und für $f = 0$ setzen:

$$f = 0 = \lambda\varkappa\mu^2 - (a\varkappa^4 + b\mu^4) = 0;$$

dann wird $F = 0$:

$$F = 0 = \vartheta\omega(u - iv)^2 - 2a\omega^4 - 2b(u - iv)^4$$

oder da man für $F = 0$ auch $F + l(u^2 + v^2 + w^2) = 0$ setzen darf, wo l ein beliebiger Parameter ist:

$$F = 0 = \vartheta\omega - 2a(u + iv)^2 - 2b(u - iv)^2.$$

Soll die durch diese Gleichung dargestellte Fläche reell sein, so müssen die Grössen a und b zu einander konjugiert sein. Dasselbe Resultat ergeben die Formeln (28) und (29) mit der Bedingung, dass $f = 0$ durch sie in die konjugierte Kurve transformiert wird. Wir wollen, um die Ergebnisse von § 7 weiter an einem Beispiele zu verificieren $a = b = 1$ setzen.

In diesem Falle sind die Koordinaten der Fläche:

$$x = \frac{(1 - \varkappa^2)^3}{\varkappa^3} + \frac{(1 - \varkappa'^2)^3}{\varkappa'^3},$$
$$y = i\frac{(1 + \varkappa^2)^3}{\varkappa^3} - i\frac{(1 + \varkappa'^2)^3}{\varkappa'^3},$$
$$z = 3\frac{1 + \varkappa^4}{\varkappa^2} + 3\frac{1 + \varkappa'^4}{\varkappa'^2}.$$

Setzt man $\frac{1}{\varkappa} - \varkappa' = \sigma_1$, $\frac{1}{\varkappa'} - \varkappa = \sigma_2$, so sind die ein — eindeutigen Abbildungsgleichungen:

$$x = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + 3\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} + 3\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} - 3\sigma_1 - 3\sigma_2,$$
$$y = i\left\{\sigma_1^3 - \sigma_2^3 + 3\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} - 3\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} + 3\sigma_1 - 3\sigma_2\right\},$$
$$z = 3\left\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right\}.$$

Die Minimalkurven unserer Art besitzen nach Formel (12) 4 Spitzen. Auf dem unendlich fernen Kugelkreis haben sie in 2 Punkten je 3 konsekutive Punkte; dieselben sind für die Kurve $f = 0 = \lambda(\varkappa + a\mu)(\varkappa + b\mu) + a_1\varkappa^3$ bestimmt durch die Gleichung:

$$(\varkappa + a\mu)^3(\varkappa + b\mu)^3 = 0.$$

Bestehen für a und b keine Voraussetzungen, so ist die Ordnung der zugehörigen Fläche gleich 36. Ist $a = -b = i$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$, so ist die Ordnung der Fläche gleich 30, denn dann geht die Gleichung $(\varkappa + a\mu)^3(\varkappa + b\mu)^3 = 0$ durch die Substitution $\varkappa = -\frac{1}{\varkappa'}$ in sich über. Die Ordnung der Doppelflächen ist gleich 15.

5. Fall (2, β).

Die beiden gleichen Wurzeln sind endlich; folglich ist $M = 2$.

Wir können nach den Formeln in § 4 für $f = 0$ einen beliebigen Kegelschnitt nehmen, nur darf in seiner Gleichung der Koeffizient von λ^2 nicht verschwinden. Die Kurven dritter und vierter Ordnung, die ebenfalls zu Minimalkurven unseres Falles führen würden, lassen sich sämtlich in diesen Kegelschnitt transformieren.

Die einfachste Gleichung dieses Kegelschnittes ist:

$$\lambda^2 = a\varkappa^2 + b\varkappa\mu + c\mu^2.$$

Die Koefficienten der zu dieser Kurve gehörigen Fläche $F = 0$ sind stets zum Teil imaginär. Die Minimalkurven unserer Gattung erzeugen somit keine Doppelflächen.

Die Minimalkurven besitzen im Unendlichen zwei Spitzen, deren Tangente den unendlich fernen Kugelkreis berührt. Die Ordnung der erzeugten Flächen ist im allgemeinen gleich 36. Ist $a = c = 0$ oder $b = 0$, $a = c$, so ist die Ordnung gleich 30. Die Klasse der Flächen ist gleich 16.

6. Fall (3).

Alle drei Wurzeln sind ungleich, was zur Folge hat, dass $M = 2$ ist.

Man kann in diesem Falle für $f = 0$ folgende, nicht rationale Kurve dritter Ordnung nehmen:

$$f = \lambda^2\mu + a\varkappa^3 + b\varkappa^2\mu + c\varkappa\mu^2 + d\mu^3 = 0.$$

Die zu dieser Kurve gehörigen Minimalkurven sind von der 12ten Ordnung. Die Ordnungen der erzeugten Flächen sind gleich 144, 138 oder 132 oder gleich 66, wenn die Fläche Doppelfläche ist. Letztere Flächen erhält man, wenn $d = 0$ ist und wenn a und c gleiche und entgegengesetzte reelle Grössen sind und b reell ist.

§ 15. Die Minimalkurven vierter Ordnung und die von ihnen erzeugten Minimalflächen.

Um die Minimalkurven vierter, fünfter, sechster und höherer Ordnung zu bestimmen, ist es zweckmässig noch eine dritte Formel für die Klasse C der Minimalkurven aufzustellen. Wir fassen zu diesem Zwecke einen unendlich fernen Punkt ins Auge und fragen, wie viele Schmiegungsebenen man von ihm aus an die Kurve legen kann. Ist N die Vielfachheit der unendlich fernen Ebene als Schmiegungsebene und M die Vielfachheit des unendlich fernen Kugelkreises in der abwickelbaren Fläche der Minimalkurve, so ist, da man zwei Tangenten von unserem Punkt aus an den unendlich fernen Kugelkreis ziehen kann, die Klasse C:

$$C = N + 2M.$$

Für Kurven vierter Ordnung kann N höchstens gleich 2 und M höchstens gleich 3 sein; letzteres, weil eine ebene Kurve vierter Ordnung höchstens drei Spitzen besitzen kann.

Die Charaktere der Minimalkurven vierter Ordnung, welche überhaupt existieren können, sind:

1) $C = 4, \quad r = 1, \; M = 1, \; N = 2, \; p = 0;$
2) $C = 4, \quad r = 1, \; M = 2, \; N = 0, \; p = 0;$
3) $C = 6, \; R = 6, \; r = 0, \; M = 3, \; N = 0, \; p = 0.$

Den ersten und zweiten Fall, in welchem man Kurven vierter Klasse hat, haben wir im letzten Paragraphen schon behandelt.

Wir gehen zur Untersuchung des dritten Falles über:

Als Kurve $f = 0$ niedrigster Ordnung würden die Formeln in § 4 eine Kurve fünfter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und vier Rückkehrpunkten ergeben, für welche ausserdem $\alpha = \beta = 2$ ist.

Es ist aber nicht leicht, die Gleichungsform von Kurven, welche diesen Bedingungen genügen, direkt hinzuschreiben. Man verfährt daher besser, wie folgt:

Jede Kurve vierter Ordnung besitzt stationäre Schmiegungsebenen (in unserem Falle sind es vier). Da für unsere Kurven der Rang gleich sechs ist, so schneidet jede derselben noch eine Kurve dritter Ordnung aus der abwickelbaren Fläche der Minimalkurve aus. Die Kurve muss wegen $M = 3$ auf dem unendlich fernen Kugelkreis einen Doppelpunkt besitzen; ferner muss eine Tangente derselben den unendlich fernen Kugelkreis berühren. Nimmt man

eine solche, stets imaginäre Kurve dritter Ordnung zur Fläche $F=0$, so bestimmt diese Minimalkurven der verlangten Art. Hat man die Gleichungsform dieser Fläche aufgestellt, so ergibt sich mit Leichtigkeit auch die von $f=0$ mittelst der Formeln (4).

Setzt man in den Formeln (17) bis (21) in § 4, $a_1=0$, $\alpha_2=1$ so haben wir einen zweiten Weg, um unsere Minimalkurve zu bestimmen.

Dieselbe lässt sich nämlich in die Minimalkurve dritter Ordnung mittelst reciproker Radienvektoren transformen. Führt man umgekehrt für letztere diese Transformation aus, so erhalten wir die verlangte Minimalkurve vierter Ordnung.

Aus unsern ersten Betrachtungen und aus dem Gleichungssystem (4), wenn man dasselbe als Punktgebilde auffasst, folgt, da letzteres stets imaginär ist und sich nicht durch die Transformationsformeln (28) und (29) in das konjugierte System transformieren lässt, dass die von der Minimalkurve erzeugte Minimalfläche stets eine gewöhnliche Fläche ist. Die Ordnung der Fläche ist gleich 16, 14 oder 12.

§ 16. Minimalkurven fünfter Ordnung.

Mittelst der Formel des letzten Paragraphen: $C=2M+N$ und der Relation (16) erkennt man, da M nicht grösser als 4, N nicht grösser als 3 sein kann, dass für die Charaktere der Minimalkurven fünfter Ordnung nur folgende beiden Annahmen möglich sind:

1) $C=5$, $R=6$, $M=1$, $N=3$, $r=2$, $p=0$ und:
2) $C=5$, $R=6$, $M=2$, $N=1$, $r=2$, $p=0$.

1. Fall (1):

Gehen wir mit unseren Werten für C, R und M in die Formeln in § 4 ein, so erhalten wir:

$$5=n+1-\alpha \text{ und}$$
$$6=n(n-1)-2d-3r+2-\alpha-\beta.$$

Für die einfachste und allgemeinste Kurve $f=0$ können wir setzen:

$$\alpha=0,\ n=4,\ d=1,\ r=2,\ \beta=0.$$

Hieraus ergibt sich für die Kurve $f=0$ folgende Gleichung:

$$\lambda(a\varkappa+b\mu)^3+a_1\varkappa^4+b_1\varkappa^3\mu+\ldots e_1\mu^4=0.$$

Da die zugehörige Minimalkurve nur einen einzigen Punkt, nämlich einen singulären Punkt mit superlinearem Zweig, besitzt, so ist die Ordnung der erzeugten Minimalflächen gleich 25.

2. Fall (2).

Für ihn ist $N=1$, das heisst, die unendlich ferne Ebene ist Schmiegungsebene der Minimalkurve. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Der eine Fall ist der, wo die beiden anderen unendlich fernen Punkte der Minimalkurve nicht mit den 3 anderen konsekutiven Punkten zusammenfällt, der andere der, wo sich in ihm noch eine Spitze vereinigt.

Den letzteren Fall erhält man, wenn man in den Gleichungen von § 4:

$$C=5=n+2-\alpha,$$
$$R=6=n(n-1)-2d-3r+4-\alpha-\beta,$$
$$\alpha=0,\ n=3,\ r=1,\ \beta=1 \text{ setzt.}$$

Die Gleichung der zu dieser Annahme gehörigen Kurve $f=0$ lautet dann:

$$f=0=\lambda^2(a\varkappa+b\mu)+c\mu^3=0.$$

Die durch die Kurve $f=0$ bestimmte Minimalkurve erzeugt eine Minimalfläche, deren Ordnung gleich 25 ist.

Den zweiten Fall erhält man, wenn man

$$\alpha=1,\ n=4,\ d=0,\ r=3,\ \beta=0 \text{ setzt.}$$

Man erhält dann folgende Kurve $f=0$ vierter Ordnung mit drei Spitzen:

$$\lambda^2\mu^2(b-b_1)^2-2\lambda\{(a\varkappa+b\mu)(a\varkappa+b_1\mu)(2a\varkappa+b\mu+b_1\mu)\}$$
$$+(a\varkappa+b\mu)^2(a\varkappa+b_1\mu)^2=0.$$

Hiebei sind die a und b beliebige Grössen.

Die Tangenten der Spitzen sind:

$$1)\ \mu=0,\quad 2)\ \lambda=a\varkappa+b\mu,\quad 3)\ \lambda=a\varkappa+b_1\mu.$$

Die dieser Kurve entsprechende Minimalfläche ist von der Ordnung 25 oder 23.

Die Ordnung ist gleich 23, wenn entweder b oder b_1 gleich Null ist oder auch wenn $a=b=-b_1$ ist.

§ 17. Die Minimalkurven sechster Ordnung.

Die Charaktere der möglichen Minimalkurven sechster Ordnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Nro.	C	R	M	N	r	p
1	4	6	1	2	4	0
2	4	6	2	0	4	0
3	6	7	1	4	3	0
4	6	7	2	2	3	0
5	6	7	3	0	3	0
6	8	8	4	0	2	0

Die beiden ersten Fälle haben wir schon unter den Minimalkurven vierter Klasse behandelt (§ 14, Fall (2)).

Für den dritten Fall ist:

$$6 = n - \alpha - 1 \text{ und}$$
$$7 = n(n-1) - 2d - 3r + 2 - \alpha - \beta.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha = 0,\ n = 5,\ d = 3,\ r = 3,\ \beta = 0.$$

$f = 0$ stellt somit eine Kurve fünfter Ordnung dar mit einem vierfachen Punkt im Punkt $\varkappa = \mu = 0$. Derselbe löst sich in 3 Doppelpunkte und 3 Rückkehrpunkte auf. Es ist somit:

$$f = 0 = \lambda(a\varkappa + b\mu)^4 + a_1\varkappa^5 + b_1\varkappa^4\mu + \ldots f_1\mu^5.$$

Die Ordnung der zur Kurve $f = 0$ gehörigen Fläche ist gleich 36.

Für den 4ten Fall ist die die Minimalkurve bestimmende Kurve $f = 0$ eine Kurve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten, von denen einer im Punkt $\varkappa = \mu = 0$ liegt, oder eine Kurve vierter Ordnung mit 2 Rückkehrpunkten und einem Doppelpunkt. Hiebei muss ein Doppelpunkt im Punkt $\varkappa = \mu = 0$ liegen, ferner die Gerade $\mu = 0$ die Kurve berühren.

Im fünften Fall ist $f = 0$ eine Kurve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt. Sie hat noch die Gerade $\mu = 0$ zur Wendetangente.

Im letzten Falle erhält man die Minimalkurve, wenn man die Minimalkurve des Falles $(1, \alpha)$ in § 14 mittelst reciproker Radienvektoren transformiert.

Man könnte auf die angegebene Weise auch noch die Minimalkurven höherer Ordnung bestimmen.

Zum Schluss dieses Paragraphen sei noch bemerkt, dass sämtliche Minimalkurven bis zur zwölften Ordnung rational sind. Die von ihnen erzeugten Minimalflächen lassen sich daher ein—eindeutig auf die Ebene abbilden.

§ 18. Beispiele zu § 12.

Erstes Beispiel.

Es sei die in § 12 definierte Funktion A: $A = \varkappa$. Dann erhält man:

$$\frac{d\lambda}{d\varkappa} = 1 + \int \frac{1}{\varkappa} d\varkappa = 1 + lg\,\varkappa,$$

$$\lambda = \varkappa\, lg\,\varkappa.$$

Die Gleichungen der Minimalfläche sind dann:

$$x = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa'}, \quad + (\varkappa + \varkappa'),$$

$$y = i\left\{\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa'}\right) - (\varkappa - \varkappa')\right\},$$

$$z = -2\, lg\,\varkappa\varkappa'.$$

Für $\varkappa\varkappa' = const.$ erhält man Kreise, die in den Ebenen

$z = -2\, lgc$ liegen.

Ist $A(\varkappa) = i\varkappa$, so erhält man gerade Linien auf der Fläche.

2. Wir nehmen für λ folgende Funktion:

$\lambda = \varkappa lg\varkappa + \varkappa^3$ d. h. wir addieren zu den Koordinaten der Minimalfläche im vorhergehenden Beispiel die Koordinaten der Enneper'schen Minimalfläche 9ter Ordnung.

Die Koordinaten dieser Fläche sind:

$$x = \frac{1 + 7\varkappa^2 - 2\varkappa^4}{\varkappa} + \frac{1 + 7\varkappa'^2 - 2\varkappa'^4}{\varkappa'},$$

$$y = i\left\{\frac{1 - 5\varkappa^2 + 2\varkappa^4}{\varkappa} - \frac{1 - 5\varkappa'^2 + 2\varkappa'^4}{\varkappa'}\right\},$$

$$z = -2\, lg\,\varkappa\varkappa' + 6\varkappa^2 + 6\varkappa'^2.$$

Für $\varkappa\varkappa' = const.$ erhält man rationale Kurven sechster Ordnung auf der Fläche. Die die Minimalfläche längs dieser Kurven berührende abwickelbare Fläche ist von der vierten Klasse.

3. Es sei $A = \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}$.

Die Gleichungen der dieser Funktion entsprechenden Minimalflächen sind:

$$x = 2 \cdot \frac{1 + \varkappa^2}{1 - \varkappa^2} + 2 \cdot \frac{1 + \varkappa'^2}{1 - \varkappa'^2},$$

$$y = i \left\{ 2 \frac{1 + x^4}{(1 - x^2)^2} - 2 \frac{1 + x'^4}{(1 - x'^2)^2} \right\},$$

$$z = 2x \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} + 2x' \frac{1 + x'^2}{(1 - x'^2)^2} - 2 lg \left(\frac{1 + x}{1 - x} \cdot \frac{1 + x'}{1 - x'} \right).$$

Die Gleichung $\frac{1 + x}{1 - x} \cdot \frac{1 + x'}{1 - x'} = const.$ stellt auf der Fläche Kurven achter Ordnung dar.

4. Es sei $A = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$, dann ist:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \pm lg \left[x \pm \sqrt{1 + x^2} \right].$$

Die Gleichungen der Minimalfläche sind:

$$x = \frac{2 + x^2 + x^4}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 + x'^2 + x'^4}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = i \left\{ \frac{2 + x^2 + {}^4}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 + x'^2 - x'^4}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

$$z = 2 \left\{ \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x'^2}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} \pm lg B \right\}, \text{ wo}$$

$$B = \left[x \pm \sqrt{1 + x^2} \right] \left[x' \pm \sqrt{1 + x'^2} \right] \text{ ist.}$$

5. Es sei $A = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Die Gleichungen der Minimalfläche sind dann:

$$x = \frac{2 + 3x^2}{(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2 + 3x'^2}{(1 - x'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$y = i \left\{ \frac{2 + x^2 + 3x^4}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 + x'^2 + 3x'^4}{(1 - x'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

$$z = 2 \left\{ x \frac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} + x' \frac{1 + 2x'^2}{(1 - x'^2)^{\frac{3}{2}}} - arc\ sin\ u \right\},$$

wo u folgende Funktion von x und x' ist.

$$u = x \sqrt{1 - x'^2} + x' \sqrt{1 - x^2}.$$

6. Es sei $A = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

Die Minimalfläche ist dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = 2\,\frac{1+\varkappa^4}{(1+\varkappa^2)^2} + 2\,\frac{1+\varkappa'^4}{(1+\varkappa'^2)^2},$$

$$y = 2i\left\{\frac{1-\varkappa^2}{1+\varkappa^2} - \frac{1-\varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}\right\},$$

$$z = 2\left\{\varkappa\,\frac{1-\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} + \varkappa'\,\frac{1-\varkappa'^2}{1+\varkappa'^2} - arctgu\right\},$$

wo u folgende Funktion von $\varkappa$ und $\varkappa'$ ist:

$$u = \frac{\varkappa+\varkappa'}{1-\varkappa\varkappa'}.$$

Die auf der Fläche liegenden algebraischen Kurven sind rationale Kurven achter Ordnung.

7. Es sei $A = \dfrac{\varkappa^2}{\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-k^2\varkappa^2)}}$.

Bezeichnet man mit $R(\varkappa)$ den Ausdruck $\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-k^2\varkappa^2)}$, so sind die Koordinaten der Fläche:

$$x = (1-\varkappa^2)\,\frac{2-\varkappa^2(1+k^2)}{R^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varkappa^2}{R^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ (1-\varkappa'^2)\,\frac{2-\varkappa'^2(1+k^2)}{R'^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varkappa'^2}{R'^{\frac{1}{2}}},$$

$$y = i\left\{(1+\varkappa^2)\,\frac{2-\varkappa^2(1+k^2)}{R^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\varkappa^2}{R^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left. - (1+\varkappa'^2)\,\frac{2-\varkappa'^2(1+k^2)}{R'^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varkappa'^2}{R'^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$z = 2\left\{\varkappa\,\frac{2-\varkappa^2(1+k^2)}{R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varkappa}{R^{\frac{1}{2}}} + \varkappa'\,\frac{2-\varkappa'^2(1+k^2)}{R'^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left. - \frac{\varkappa'}{R'^{\frac{1}{2}}} - u\right\}, \text{ wo folgende Bedeutung hat:}$$

$$u = \int_0^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\sqrt{R}} + \int_0^{\varkappa} \frac{d\varkappa'}{\sqrt{R'}}.$$

Die Grösse u lässt sich durch das Integral

$u = \int_0^{\varkappa''} \frac{d\varkappa''}{\sqrt{R''}}$ definieren.

Zwischen $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\varkappa''$ besteht dann die bekannte Beziehung:

$$\varkappa'' = \frac{\varkappa\sqrt{(1-\varkappa'^2)(1-k^2\varkappa'^2)} + \varkappa'\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-k^2\varkappa^2)}}{1-k^2\varkappa'^2}.$$

8. Wie im Beispiel (2) dieses Paragraphen lassen sich auch zu den Koordinaten transcendenter Minimalflächen mit einer Schar

algebraischer Kurven, welche durch die Funktionen $\varphi(u)$ und $f(\varkappa)$ in § 12 definiert sind, die Koordinaten einer algebraischen Minimalfläche addieren, ohne dass die neue Minimalfläche die Eigenschaft verliert, eine Schar algebraischer Kurven zu enthalten.

So können wir zum Beispiel die durch die Funktion:

$F'''(s) = \frac{1}{4} i \left(s - \frac{1}{s^5} \right)$ definierte algebraische Minimalkurve wählen.

Nach dem Gleichungssystem (45) ist dieselbe dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \Re \int sn\, u \,.\, sin\, 3\, u\, du,$$
$$y = \Re \int cos\, u\, sin\, 3\, u\, du,$$
$$z = \Re i \int sin\, 3\, u\, du, \text{ woraus folgt:}$$
$$x = \Re i \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} sin\ 4\ u + \frac{1}{2} sin\ 2\ u \right\},$$
$$y = -\Re \left\{ + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} cos\ 4\ u + \frac{1}{2} cos\ 2\ u \right\},$$
$$z = -\Re \frac{i}{3} cos\, 3\, u.$$

Mittelst der Formeln (46) lassen sich diese Ausdrücke auch in $sn\,\varkappa$, $cn\,\varkappa$, $dn\,\varkappa$ ausdrücken.

Wir können dann die Koordinaten der Flächen in § 12 addieren und erhalten auf diese Weise wieder Minimalflächen mit einer Schar algebraischer Kurven.